

מתמטיקה קורס השלמה

פרק 5 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגרייטמיים

תוכן העניינים

1	. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות.
3	. חוקי הלוגריתמים
5	. הלוגריתם הטבעי
7	. משוואות עם בסיסים שונים
8	. אי-שוויונים לוגרייטמיים.

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

סיכום כללי

הגדרה

elogarithm מוגדר באופן הבא : $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ כאשר $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

הסביר

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בטור החזקה שיש להעלות את a , על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x .

ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.

נחשב ערכי לוגריתמים ונפתרו משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפיה ההגדירה למשווהה מעריךית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי : $\log_a 1 = 0$ וכן $\log_a a = 1$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הבאים :

$$\log_{25} 5$$

ג. $\log_2 32$

$$\log 1000$$

ב. $\log_4 \frac{1}{16}$

$$\log_a a^4$$

ד. $\log_8 4$

$$\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$$

$$\text{.}$$

2) פתרו את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג) :

$$\log_2 x = 16$$

$$\log_{36} 6 = x$$

$$\log_x 64 = 3$$

$$\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$$

$$\log_x (3x+4) = 2$$

$$\log_x 25 = 2$$

(3) פתר את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג) :

$$\log_8(x^4 - 73) = 1 \text{ ב.}$$

$$\log_6(4x - 2) = 1 \text{ א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \text{ ג.}$$

(4) פתר את המשווה הלוגריתמית הבאה : $\log_4(\log_3 x) = 1$

(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

(5) פתר את המשווה הלוגריתמית הבאה : $\log_2(3^x + 37) = 6$

(מתקובלת משווה מעירכית)

(6) פתר את המשווה הלוגריתמית הבאה (הצבה) : $(\log_2 x)^4 = 10000$

תשובות סופיות

ה. -2 ג. $\frac{2}{3}$ ב. 3 א. 5 (1)

ג. -1.5 א. 4.

ב. $x = 4$ ג. $x = 27$ ב. $x = 65,536$ א. $x = \frac{1}{2}$ (2)

ג. $x = 4$ א. $x = 5$.

ב. $x = -2$ ג. $x = \pm 3$ א. $x = 2$ (3)

ג. $x = 81$ (4)

א. $x = 3$ (5)

ב. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ (6)

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0$ וארוגומנטים x ו- y חיוביים:

- **מכפלה לסכום:** $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

- **מנה להפרש:** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

- **מקדם למספר:** $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $0 < b < 1$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגרים):

א. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$

ב. $\log_3 12 + \log_3 2.25$

ג. $\log_2 200 - \log_2 100$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגרים):

א. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$

ב. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתרו את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$

ב. $\log_2 x + \log_2(x-6) = 4$

4) פתרו את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2(2x-2) - \log_2(16-x) = \log_2(x-1) + 1$

(5) פתר את המשוואות הבאות (מתקבלת משווהה מעריצית) :

$$\log_3(3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3(5^x - 3) . \text{ א}$$

תשובות סופיות:

א. 3 ב. -3 ג. 1 (1)

א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1 (2)

א. $x = 3, \frac{1}{27}$ ב. $x = \frac{1}{4}, 256$ ג. 1 (3)

א. $x = 6$ ב. $x = 2.5$ ג. 1 (4)

ג. $x = 1$ (5)

הלוגריתם הטבעי

סיכום כללי

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: \ln ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם LN.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- b מספרים.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{א. } \ln e^2$$

2) פתרו את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{א. } \ln x = 2$$

3) פתרו את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \quad \text{א.} \\ 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \quad \text{ב.} \\ \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

4) פתרו את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג שניי אגפי המשווה):

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ב.} \quad x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{א.}$$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקת לוגריתמית):

$$\text{ב. } e^{2\ln 3} \quad \text{א. } e^{\ln 3}$$

תשובות סופיות

-1.5 .ג. ב. -4 .א. 2 (1)

$$x = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} .ב. \quad x = e^2 .א. (2)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e} .ג. \quad x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} .ב. \quad x = 0 .א. (3)$$

$$x = \sqrt{e}, e .ב. \quad x = e^3, \frac{1}{e^2} .א. (4)$$

9 .ב. 3 .א. (5)

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
 במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוגרנד כדי לבטא את ערך המעריכ: $x = \log_3 4$.
 את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתרו את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

$$\text{ב. } 2^x - 9 = 0 \quad \text{א. } 3^x = 6$$

2) פתרו את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x} = 3$

תשובות סופיות:

$$\text{א. } x = \log_2 9 = 3.17 \quad \text{ב. } x = \log_3 6 = 1.63 \quad \text{1}$$

$$x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36 \quad \text{2}$$

אי-שוויונים לוגריתמיים

סיכום כללי

. $0 < a < 1$, $a > 1$, עבור $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, עבור $a^x > a^y \Rightarrow x > y$

שאלות

פתרו את אי-השוויונים הבאים :

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (2)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (4)$$

$$\log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad (1)$$

$$\ln x < 3 \quad (3)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (2)$$

$$x > 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (4)$$

$$0 < x < e^3 \quad (3)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (5)$$